مراجعة نهائية في الهندسة الفراغية

السؤال الأول اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

① المستقيمان $\overleftrightarrow{سس'}$ ، $\overleftrightarrow{عع'}$ يكونان مستوى الإحداثيات الذي معادلته ...

(أ) س = ٠ (ب) ص = ٠ (ج) ص = ٢ (د) ع = ٠

② إذا كان محور الصادات يقطع الكرة التي مركزها (٣، −٤، ١٢) وطول نصف قطرها ١٢ سم في النقطتين أ، ب فإن أب = ---

(أ) ٦ (ب) ٨ (ج) ٢٤ (د) ٢٦

③ طول قطر الكرة التي معادلتها:

س² + ص² + ع² − ٦س + ٨ص − ٤ع + ٤ = صفر يساوي ---

(أ) ٥ (ب) ١٠ (ج) ١٥ (د) ٢٠

④ معادلة الكرة التي مركزها م (١، −٢، −٥) والمستوى س ص يمس هذه الكرة هي ---

(أ) (س − ١)² + (ص + ٢)² + (ع + ٥)² = ١

(ب) (س − ١)² + (ص + ٢)² + (ع + ٥)² = ٤

(ج) (س − ١)² + (ص + ٢)² + (ع − ٥)² = ٢٥

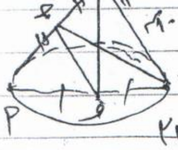
(د) (س − ١)² + (ص + ٢)² + (ع + ٥)² = ٢٥

⑤ إذا كان $\vec{أ}$ = (−٢، ٤، ٦)، $\vec{ب}$ = (١٠، ل، ٣) حيث ل ∈ ح⁺ وكان ‖$\vec{أب}$‖ = ٧ فإن قيمة ل = ---

(أ) ١٠ (ب) ٨ (ج) ٦ (د) ٤

⑥ إذا كان: (٣٠°، ٧٠°، θ) هي زوايا الاتجاه لمتجه فإن θ = ---

(أ) ١٠٠ (ب) ٨٠ (ج) ٦٠° (د) ٦٨,٦°



⑦ مخروط دائري قائم محيط قاعدته = ١٢π سم

فإن $\vec{ك} \cdot \vec{مو}$ = ---

(أ) −٤٢ (ب) −٤٠ (ج) −٢٧ (د) −٢٢

٨) إذا كان المتجهان (٢، ك، -٣) ، (٤، ٦، -٦) متوازيين فإن ك = ...

أ) ٦ ب) ٣ جـ) -٣ د) ١

٩) أ ب جـ د متوازي أضلاع وكان $\overrightarrow{أب}$ = (٢، ٢، -١) ، $\overrightarrow{أد}$ = (-١، ٢، -٣)
فإن مساحة متوازي الأضلاع = ... سم²

أ) ٦ ب) √٢٧ جـ) √١١٣ د) √١٠١

١٠) إذا كان: $\overrightarrow{أ}$ ⊥ $\overrightarrow{ب}$ ، $\overrightarrow{أ}$ ⊥ $\overrightarrow{جـ}$ وكان: $\overrightarrow{ب}$ = (٢، ٣، ٢) ، $\overrightarrow{جـ}$ = (١، ٢، ١)
وكان ||$\overrightarrow{أ}$|| = ٤√٢ فإن: $\overrightarrow{أ}$ = ...

أ) (٢، ٢، ١) ب) (-٤، ٠، ٤) جـ) (٤، ٤، ٠) د) (٠، -٤، ٤)

١١) إذا كان $\overrightarrow{أ}$ = (٢، ١، -٢) ، $\overrightarrow{أ}$ + $\overrightarrow{ب}$ = $\overrightarrow{أ}$ × $\overrightarrow{ب}$ فإن: $\overrightarrow{ب}$ = ...

أ) (-٢، -١، -٢) ب) (٢، ١، -٢) جـ) (-٢، -١، ٢) د) (-٢، ١، ٢)

١٢) إذا كانت $\overrightarrow{أ}$ = (١، ٢، ٠) ، $\overrightarrow{ب}$ = (-١، ٢، ٣) ، $\overrightarrow{جـ}$ = (٢، ٠، ١)
تمثل ثلاثة أحرف متجاورة من متوازي سطوح فإن حجمه = ...

أ) ٨ ب) ١٦ جـ) ٣٢ د) ٦٤

١٣) قياس الزاوية المحصورة بين المتجهين $\overrightarrow{أ}$ = (٢، ٠، ٢) ، $\overrightarrow{ب}$ = (٠، ٠، ٤)
فإن θ = ...

أ) ٣٠° ب) ٤٥° جـ) ٦٠° د) ٩٠°

١٤) أ = (-١، ٣، ٤) ، ب = (١، -٢، ٥) فإن ||$\overrightarrow{أب}$|| = ...

أ) √٢٦ ب) √٢٣ جـ) √٢٥ د) √٢٤

١٥) إذا كان أ = (-٧، ٣، ١٠) ، ب = (-٤، -١، -٢) فإن متجه الوحدة في اتجاه $\overrightarrow{أب}$

أ) ($\frac{٣}{١٣}$ ، $\frac{٤}{١٣}$ ، $\frac{١٢}{١٣}$) ب) ($\frac{٣}{١٣}$ ، $\frac{-٤}{١٣}$ ، $\frac{-١٢}{١٣}$) جـ) ($\frac{-٣}{١٣}$ ، $\frac{٤}{١٣}$ ، $\frac{١٢}{١٣}$) د) ($\frac{-٣}{١٣}$ ، $\frac{-٤}{١٣}$ ، $\frac{-١٢}{١٣}$)

١٦) إذا كان $\overrightarrow{أ}$ = (١، -٢، ١) ، $\overrightarrow{ب}$ = (-٢، ١، ٢) فإن متجه اتجاه $\overrightarrow{أ}$ في اتجاه $\overrightarrow{ب}$

أ) ($\frac{٤}{٩}$ ، $\frac{-٢}{٩}$ ، $\frac{-٤}{٩}$) ب) ($\frac{٤}{٩}$ ، $\frac{٢}{٩}$ ، $\frac{٤}{٩}$) جـ) ($\frac{-٤}{٩}$ ، $\frac{-٢}{٩}$ ، $\frac{-٤}{٩}$) د) ($\frac{٤}{٩}$ ، $\frac{-٢}{٩}$ ، $\frac{-٤}{٩}$)

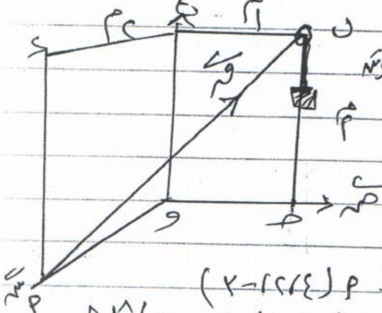
أجب عن الأسئلة الآتية

① أوجد م . ح المعادلة $\begin{vmatrix} أ+١ & ٣ & ٢ \\ ٠ & أ-١ & ٥ \\ ٠ & ٠ & ٧ \end{vmatrix} = ٢١$

③ إذا كانت الكرتان: $(س-٣)^٢ + ص^٢ + (ع-٣)^٢ = ١٦$ ، $(س+١)^٢ + (ص-٤)^٢ + (ع-ل)^٢ = ٢٥$ متماستان فأوجد قيم ل.

④ إذا كان $(س-٢)^٢ + (ص+٤)^٢ + (ع-٢)^٢ = ١$ ، $(س+٤)^٢ + (ص-٤)^٢ + (ع-٢)^٢ = ٤$ معادلتا كرتين أوجد البعد بين مركزي الكرتين وبين أنهما غير متقاطعتين

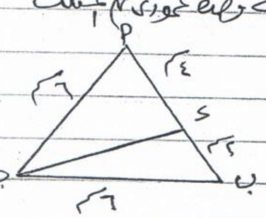
⑤ إذا كان $\vec{أ} = (ل، ٢، ٠)$ ، $\vec{ب} = (١، ٢، ٠)$ أثبت أن $\|\vec{أ}\| = \|\vec{ب}\|$ ⟸ $|ل| = ١$



⑥ من الشكل المقابل قوة الشد في الخيط $\vec{أب}$ = ١٢ نيوتن أوجد المركبات الجبرية للقوة $\vec{ق}$ في اتجاهات محاور الإحداثيات

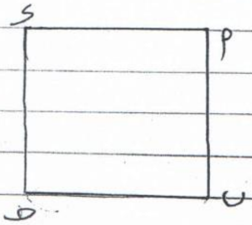
⑦ أوجد مساحة المثلث الذي رؤوسه النقط أ(٤، ٢، -٢) ، ب(٧، ٢، -٢) ، ج(١، ٨، -٣) ثم أوجد متجه وحدة عمودي على المثلث

$\vec{ي} = \frac{\vec{أب} \times \vec{أج}}{\|\vec{أب} \times \vec{أج}\|}$



⑧ من الشكل المقابل: أ ب ج مثلث متساوي الأضلاع ي ∈ $\overline{أب}$ حيث أي = ٢ ي ب = ٤ سم

أوجد $\vec{جي} \cdot \vec{جب}$



⑨ من الشكل المقابل

أ ب ج د مربع طول ضلعه ١٠ سم

أوجد

(أ) $\vec{أب} \cdot \vec{جأ}$

(ب) $\vec{أد} \cdot \vec{جب}$

ملاحظة ← $\vec{أ}\cdot(\vec{ب}\times\vec{جـ}) = \vec{جـ}\cdot(\vec{أ}\times\vec{ب})$

مثال: إذا كان $\vec{أ} = \vec{ب}\times\vec{جـ}$ فإن $\vec{أ}\cdot\vec{ب} = (\vec{ب}\times\vec{جـ})\cdot\vec{ب}$

$= \vec{جـ}\cdot(\vec{ب}\times\vec{ب})$

= صفر

(10) أوجد قيمة: $\dfrac{\|\vec{أ}\times\vec{ب}\|^2 + |\vec{أ}\cdot\vec{ب}|^2}{\|\vec{أ}\|^2\,\|\vec{ب}\|^2}$

(11) إذا كانت $\theta \in]-\pi ، \pi[$ أوجد القياس والعمدة للعدد ع = 1 + جتا θ + ت جا θ

الوحدة الثانية : الصور المختلفة لمعادلة خط مستقيم في الفراغ

إذا كان ل مستقيم في الفراغ متجه اتجاهه $\vec{ى} = (أ ، ب ، جـ)$ ويمر المستقيم بنقطة أ $(س_1 ، ص_1 ، ع_1)$ ، ب نقطة أخرى على المستقيم متجه موضعها $\vec{ر} = (س ، ص ، ع)$ فإن: $\vec{ر} = أ + ك\vec{ى}$ الصورة المتجهة

حيث ك عدد حقيقي لا يعبر عن عدد ثابت وحيد بل يأخذ قيم مختلفة ويسمى بارامتر وكل قيمة للبارامتر ك يمكن إيجاد نقطة على المستقيم

أي بوضع ك = 1 ، 2 ، 3 ، −1 ، −2 ، 4 ، ... ــــــ

وبالتعويض عن $\vec{ر} = (س ، ص ، ع)$ نحصل على المعادلات البارامترية

$س = س_1 + ك أ$ ، $ص = ص_1 + ك ب$ ، $ع = ع_1 + ك جـ$

وتكون المعادلة الكارتيزية $\dfrac{س - س_1}{أ} = \dfrac{ص - ص_1}{ب} = \dfrac{ع - ع_1}{جـ}$

وعندما تكون أ = ٠ فإن المعادلة الكارتيزية تكتب كالآتي $س = س_1$ ، $\dfrac{ص - ص_1}{ب} = \dfrac{ع - ع_1}{جـ}$

وإذا كانت جيوب تمام الاتجاه هي ل ، م ، ن

فتكون الصورة الكارتيزية $\dfrac{س - س_1}{ل} = \dfrac{ص - ص_1}{م} = \dfrac{ع - ع_1}{ن}$

(1) أوجد الصور المختلفة لمعادلة المستقيم $\dfrac{س + 4}{3} = \dfrac{2ص + 5}{2} = \dfrac{4 - ع}{4}$

ثم أوجد نقطة تقع على هذا المستقيم.

الزاوية بين مستقيمين في الفراغ جتا θ = $\dfrac{|\vec{ى_1}\cdot\vec{ى_2}|}{\|\vec{ى_1}\|\,\|\vec{ى_2}\|}$

وإذا كانت $(ل_1 ، م_1 ، ن_1)$ ، $(ل_2 ، م_2 ، ن_2)$ هي جيوب تمام الاتجاه للمستقيمين فإن

جتا θ = $|ل_1 ل_2 + م_1 م_2 + ن_1 ن_2|$

(٢) أوجد قياس الزاوية بين المستقيمين

(أ) ل١ : س = ٢ − ٥ك ، ص = ١ − ك ، ع = ٣ + ٤ك

ل٢ : $\frac{\text{س}+١}{٣} = \frac{٢-\text{ص}}{٤} = \frac{\text{ع}}{٢}$

(ب) جيوب تمام الاتجاه ($\frac{٢}{٣}$ ، $\frac{-٢}{٣}$ ، $\frac{١}{٣}$) ، ($\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ، $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ، ٠)

المستقيمان المتوازيان في الفراغ :

إذا $\vec{\text{هـ}}_١$ = (أ١ ، ب١ ، جـ١) ، $\vec{\text{هـ}}_٢$ = (أ٢ ، ب٢ ، جـ٢) هما متجها اتجاه المستقيمين ل١ ، ل٢ فيكون ل١ // ل٢ إذا وفقط إذا $\vec{\text{هـ}}_١$ // $\vec{\text{هـ}}_٢$

١- $\vec{\text{هـ}}_١$ = ك $\vec{\text{هـ}}_٢$ ٢- $\frac{\text{أ}_١}{\text{أ}_٢} = \frac{\text{ب}_١}{\text{ب}_٢} = \frac{\text{جـ}_١}{\text{جـ}_٢}$ ٣- $\vec{\text{هـ}}_١ \times \vec{\text{هـ}}_٢ = \vec{\text{و}}$

ويكون المستقيمان متعامدان إذا كان $\vec{\text{هـ}}_١ \cdot \vec{\text{هـ}}_٢$ = صفر

(٣) أثبت أن المستقيمان $\vec{\text{ر}}_١$ = (٣ ، −٣ ، ٥) + ك١ (٠ ، −٥ ، ٥)

$\vec{\text{ر}}_٢$ = (−٢ ، ٣ ، ١) + ك٢ (٥ ، −١ ، −١)

متعامدان ومتقاطعان في نقطة وأوجد إحداثيات نقطة تقاطعهما

لإثبات أن المستقيمان متخالفان فنثبت أن قيم ك١ ، ك٢ لا تحقق $\vec{\text{ر}}_١ = \vec{\text{ر}}_٢$

(٤) أثبت أن المستقيمان $\vec{\text{ر}}_١$ = (٣ ، −١ ، ٢) + ك١ (٤ ، ١ ، ٣)

$\vec{\text{ر}}_٢$ = (٠ ، ٤ ، −١) + ك٢ (١ ، −١ ، ٢) متخالفان

(٥) أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (٢ ، −١ ، ٣) ويقطع المستقيم

$\vec{\text{ر}}_١$ = (١ ، −١ ، ٢) + ك (٢ ، ٢ ، −١) على التعامد.

(٦) أوجد طول العمود المرسوم من النقطة (٢ ، ١ ، −٤) على المستقيم

$\vec{\text{ر}}$ = (١ ، −١ ، ٢) + ك (٢ ، ٣ ، −٢)

ملحوظة: إذا قال أوجد معادلة المستقيم المار بنقطة (٣ ، ٢ ، ٥) ويصنع مع الاتجاهات الموجبة لمحاور الإحداثيات زوايا متساوية

نعوض في جتا²θ + جتا²θ + جتا²θ = ١ ∴ ٣ جتا²θ = ١ ∴ جتا θ = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$

∴ $\vec{\text{هـ}}$ = ($\frac{١}{\sqrt{٣}}$ ، $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ ، $\frac{١}{\sqrt{٣}}$) ومنها تأخذ $\vec{\text{هـ}}$ قيمة الاتجاه (١ ، ١ ، ١)

* معادلة المستوى في الفراغ :

الصورة المتجهة لمعادلة المستوى في الفراغ

يجب معرفة نقطة على المستوى أ(س١، ص١، ع١) ومتجه الرتبي $\overrightarrow{\text{ر}}$ = (س، ص، ع)

العمودي على المستوى $\overrightarrow{\text{ن}}$ = (أ، ب، جـ)

$\overrightarrow{\text{ن}} \cdot \overrightarrow{\text{ر}} = \overrightarrow{\text{ن}} \cdot \overrightarrow{\text{أ}}$ الصورة المتجهة لمعادلة المستوى

الصورة القياسية : أ(س − س١) + ب(ص − ص١) + جـ(ع − ع١) = ٠

الصورة العامة : أس + ب ص + جـ ع + د = ٠

(٧) أوجد الصور المختلفة لمعادلة المستوى المار بالنقطة (١-، ٣، ٤، ٢)

والمتجه $\overrightarrow{\text{ن}}$ = (٢، -١، ٣) عمودي على المستوى

معادلة المستوى المار بثلاث نقط ليست على استقامة واحدة

أولاً يجب التأكد من أن النقط ليست على استقامة واحدة

مثلاً أ(٣، -١، ٠) ، ب(٢، ١، ٤) ، جـ(٠، ٣، ٣)

نوجد $\overrightarrow{\text{أب}}$ = ب − أ = (-١، ٢، ٤) ، $\overrightarrow{\text{أجـ}}$ = جـ − أ = (-٣، ٤، ٣)

$\frac{-1}{-3} \neq \frac{2}{4}$ ∴ $\overrightarrow{\text{أب}} \nparallel \overrightarrow{\text{أجـ}}$ ∴ النقط ليست على استقامة واحدة

ثم نوجد متجه اتجاه عمودي على المستوى $\overrightarrow{\text{ن}} = \overrightarrow{\text{أب}} \times \overrightarrow{\text{أجـ}}$

$= -10\,\overrightarrow{\text{س}} - 9\,\overrightarrow{\text{ص}} + 2\,\overrightarrow{\text{ع}}$

$\overrightarrow{\text{ن}} \cdot \overrightarrow{\text{ر}} = \overrightarrow{\text{ن}} \cdot \overrightarrow{\text{أ}}$

(-١٠، -٩، ٢) · $\overrightarrow{\text{ر}}$ = (-١٠، -٩، ٢) · (٣، -١، ٠)

الصورة القياسية -١٠(س − ٣) − ٩(ص + ١) + ٢ع = ٠

الصورة العامة -١٠س − ٩ص + ٢ع + ٢١ = ٠

كما أنه توجد طريقة أخرى

$$\begin{vmatrix} \text{س} - \text{س}_1 & \text{ص} - \text{ص}_1 & \text{ع} - \text{ع}_1 \\ \text{س}_2 - \text{س}_1 & \text{ص}_2 - \text{ص}_1 & \text{ع}_2 - \text{ع}_1 \\ \text{س}_3 - \text{س}_1 & \text{ص}_3 - \text{ص}_1 & \text{ع}_3 - \text{ع}_1 \end{vmatrix} = 0$$

ويمكن إثبات أن المستويان متقاطعان وذلك بإثبات $\overrightarrow{\text{ن}_1} \neq \overrightarrow{\text{ن}_2}$

فنحصل على المعادلة

(٨) إذا قطع المستوى ٨س + ٢ص + ٤ع = ٨ محاور الاحداثيات س، ص، ع في النقاط أ، ب، جـ على الترتيب أوجد مساحة △ أ ب جـ

(٩) أوجد معادلة خط تقاطع المستويين
س + ٢ص − ٢ع = ١ ، ٢س + ص − ٣ع = ٥

(١٠) أوجد طول العمود المرسوم من النقطة (−٣، ١، ٤) على المستوى الذي معادلته ر . (١، −٣، ٢) = ٤

(١١) أثبت أن المستويين ٣س + ٦ص + ٦ع = ٤ ، س + ٢ص + ٢ع = ١ متوازيان
ثم أوجد البعد بينهما.

(١٢) أثبت أن المستقيم ر = ع + ل(١س + ٢ص + ٤ع)
عمودي على المستوى س + ½ص + ٢ع = ٥
إذا كان متجه اتجاه المستقيم هو يوازي المتجه العمودي على المستوى كان
المستقيم ⊥ المستوى

(١٣) أوجد إحداثيات نقطة تقاطع المستقيم ر = ع + ل(٢، ١، ١)
مع المستوى ر . س = ٤.

(١٤) أوجد معادلة المستوى الذي يحتوي المستقيم ل١: ر = (١، ٢، −٥)
+ ل١(٦، −٢، −١) ويوازي المستقيم ل٢: ر = (١، ٧، −٤)
+ ل٢(−١، −٢، ٢)
إيجاد ح ثم تضرب ح١ × ح٢ للمستقيمين

الزاوية بين مستويين جتا θ = $\frac{|ن_1 . ن_2|}{||ن_1|| \, ||ن_2||}$

أوجد قياس الزاوية بين المستويين
٢س + ٢ص + ٧ع = ٨ ، ٢س − ٤ص + ٤ع = ٥

(١٥) إذا قطع المستوى ٢٠س + ١٥ص + ١٢ع = ٦٠ محاور الإحداثيات س ، ص ، ع في أ ، ب ، ج فأوجد حجم المجسم أ ب ج و

(١٦) باستخدام المصفوفات أوجد م.ح للمعادلات

$\frac{٢}{س} + \frac{٣}{ص} + \frac{١٠}{ع} = ٤$ ، $\frac{٤}{س} - \frac{٦}{ص} + \frac{٥}{ع} = ١$

، $\frac{٦}{س} + \frac{٩}{ص} - \frac{٢٠}{ع} = ٢$

(١٧) إذا كانت قياس الزاوية التي يصنعها المتجه $\overrightarrow{أ}$ = (٢ ، ٤ ، ل) مع الاتجاه الموجب لمحور الصادات تساوي ٤٥° فأوجد قيمة ل